

Сокіл Богдан Іванович¹ , Сенік Андрій Петрович² ,

Sokil B.

Senyk A.

Сокіл Марія Богданівна³ , Андрухів Андрій Ігорович⁴ 

Sokil M.

Andruxhiv A.

ДИНАМІКИ ДВОВИМІРНИХ ГНУЧКИХ ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМ ПРИВОДІВ, ЯКІ ХАРАКТЕРИЗУЮТЬСЯ СТАЛОЮ ШВИДКІСТЮ ПОЗДОВЖНЬОГО РУХУ

DYNAMICS OF TWO-DIMENSIONAL FLEXIBLE ELEMENTS OF DRIVE SYSTEMS, WHICH
ARE CHARACTERIZED BY CONSTANT SPEED OF LONGITUDINAL MOVEMENT

АНОТАЦІЯ:

Запропоновано методику дослідження динамічних процесів у двовимірних гнучких елементах систем приводу та транспортування. В її основу покладено: а) принцип одночастотності коливань у нелінійних системах; б) хвильову теорію руху; в) узагальнення, на базі наведеного вище, асимптотичного методу Крилова-Боголюбова-Митропольського (КБМ) на нові класи динамічних систем. У сукупності наведене дозволяє отримати двопараметричну множину розв'язків, які визначають вплив на динамічні процеси швидкості поздовжнього руху та фізико-механічних характеристик гнучких елементів систем транспортування.

ВСТУП

В останні десятиліття хвильова теорія руху [1,2] набула нового розвитку в першу чергу для дослідження процесів у довгомірних середовищах [3-6],

¹ доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інженерної механіки
Національна академія сухопутних військ ім. гетьмана П.Сагайдачного, УКРАЇНА

² канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики
Національний університет «Львівська політехніка», УКРАЇНА

³ канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри транспортних технологій
Національний університет «Львівська політехніка», УКРАЇНА

⁴ канд. техн. наук, директор науково-технічної бібліотеки
Національний університет «Львівська політехніка», УКРАЇНА

This work has been republished [without change]. First publication: Сокіл, Б., Сенік, А., Сокіл, М., & Андрухів, А. (2021). ДИНАМІКИ ДВОВИМІРНИХ ГНУЧКИХ ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМ ПРИВОДІВ, ЯКІ ХАРАКТЕРИЗУЮТЬСЯ СТАЛОЮ ШВИДКІСТЮ ПОЗДОВЖНЬОГО РУХУ. *Грааль Науки*, (2-3), 329-334. DOI 10.36074/grail-of-science.02.04.2021.067.



тобто середовищах, основні характеристики хвиль котрих змінюються як вздовж середовища, так і в часі. Її узагальнення дозволяє вивчити також процеси у середовищах, які для свого аналітичного дослідження не допускають застосування класичного методу відокремлення змінних. Йдеться в першу чергу про однорідні динамічні системи, які характеризуються поздовжньою швидкістю руху. Набагато складнішими і одночасно важливішими є задачі для середовищ обмеженої довжини. Для таких систем важливим фактором при описанні процесу є врахування крайових умов. Перші спроби щодо перенесення хвильової теорії руху на випадок одновимірних обмеженої довжини систем зроблено в [7,8], де встановлено низку особливостей процесу у системах, які характеризуються поздовжнім рухом. Зокрема, показано, що процес у них можна трактувати як накладання прямої і відбитої хвиль довжини котрих є різними, а частота процесу залежить від поздовжньої складової швидкості руху. Поєднання ж хвильової теорії із асимптотичними методами нелінійної механіки [9,10], дозволило в [11,12] для слабо нелінійних одновимірних моделей руху систем (квазілінійних) дослідити вплив різної природи обмежених за величиною силових чинників. У даній роботі робиться спроба поширити базові положення хвильової теорії руху, які викладені у [7,8] на більш складний випадок, а саме, двовимірні системи що характеризуються сталою швидкістю поздовжнього руху. До них в першу чергу відносяться стрічки конвеєрних ліній, транспортерів, процес рулонування металевої полоси та ін. З огляду на вказане і полягає актуальність роботи.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Математичною моделлю коливань двовимірних тіл малої згинної жорсткості, які характеризуються сталою швидкістю поздовжнього руху, є диференціальне рівняння

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - (\alpha^2 - V^2)u_{xx} - \gamma^2 u_{yy} = \mathcal{F}(u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}). \quad (1)$$

В (1) α, γ - деякі сталі, $u(t, x, y)$ - шукана функція, t - час, x, y - Ейлерові координати рухомого об'єкту, V - його швидкість поздовжнього руху, $\mathcal{F}(u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy})$ - відома аналітична функція, яка описує нелінійні сили системи, а малий параметр ε вказує на малу величину останніх у порівнянні із лінійною складовою відновлюючої

сили. Для рівняння (1) будемо розглядати крайові умови вигляду

$$u(t, x, y)|_{x=0} = u(t, x, y)|_{x=l} = 0, \quad (2)$$

які узгоджуються із умовами безвідривності стрічки від привідного і веденого барабанів на лініях контакту з останніми. Легко переконатись, що навіть спрощена лінійна математична модель динамічного процесу досліджуваного об'єкту (при $\varepsilon = 0$), тобто

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - (\alpha^2 - V^2)u_{xx} - \gamma^2 u_{yy} = 0 \quad (3)$$

для свого вивчення не дає змоги застосувати такі класичні методи побудови розв'язків рівнянь з частинними похідними як Фур'є і Д'Аламбера [13]. Не дивлячись на вказане, покажемо спочатку, що розв'язок крайової задачі (3), (2) має хвильовий характер.

Розвиваючи основну ідею концепції хвильового руху для динамічних систем, які характеризуються сталою складовою швидкості поздовжнього руху, спочатку покажемо, що розв'язок рівняння (3) за крайових умов (2) можна трактувати як накладання прямої і відбитої хвиль довжини яких є різними, тобто

$$u(t, x, y) = a \cos(kx + \delta y + \omega t + \varphi) + b \cos(\chi x - \delta y - \omega t + \psi), \quad (4)$$

де, відповідно, ω - частота, a, b - амплітуди прямої і відбитої хвиль, k, χ - їх хвильові числа, а δ - хвильове число поперечної складової хвилі, φ, ψ - початкові фази хвиль. Обґрунтувати таке представлення можна хоча б такими факторами: а) при $\gamma = 0$ із (4) утворюються відомі результати, які стосуються процесів у одновимірних тілах; б) у граничному випадку при $V = 0$ із (4) маємо результати, що узгоджуються із відомими класичними. Дійсно, підставляючи в (3) на місце похідних вирази, які випливають із (4), для зв'язку між частотою і хвильовими числами отримуємо дисперсійні співвідношення

$$\begin{aligned} \omega^2 + 2V\omega k - (\alpha^2 - V^2)k^2 - \gamma^2 \delta^2 &= 0, \\ \omega^2 - 2V\omega \chi - (\alpha^2 - V^2)\chi^2 - \gamma^2 \delta^2 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Крім цього, хвильове представлення розв'язку (4) буде задовольняти

крайову умову $u(t, x, y)|_{x=0} = 0$, якщо має місце зв'язок між амплітудами та початковими фазами хвиль: $a = b$, $\varphi = -\psi$. Це можна пояснити тим, що для випадку консервативної коливної системи (до неї не надходить зовнішня енергія і дисипативні сили відсутні) амплітуда процесу є незмінною. Враховуючи наведене, із другої крайової умови, тобто $u(t, x, y)|_{x=l} = 0$, маємо

$$\cos(kl + \delta y + \omega t + \varphi) - \cos(\chi l - \delta y - \omega t - \varphi) = 0. \quad (6)$$

Вказане вище має виконуватись для довільного моменту часу t , а це дає додаткові умови для зв'язку між хвильовими числами κ , χ , δ і довжиною стрічки l

$$\begin{aligned} \cos(kl + \delta y) - \cos(\chi l - \delta y) &\equiv 0, \\ \sin(kl + \delta y) + \sin(\chi l - \delta y) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Легко переконатись, що тотожності (7) визначають зв'язок між хвильовими числами κ , χ у вигляді

$$\kappa + \chi = \frac{2k\pi}{l}, k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Дисперсійні співвідношення (5) разом із залежностями (7) дають змогу визначити хвильові числа κ , χ та частоту процесу ω а відтак, незбурені коливання у вигляді

$$u_0(t, x, y) = a \left[\cos \left(\frac{k\pi}{l} \left(1 - \frac{V}{\alpha} \Delta \right) x + \frac{m\pi}{b} y + \frac{k\pi}{l} \frac{\alpha^2 - V^2}{\alpha} \Delta t + \varphi \right) - \cos \left(\frac{k\pi}{l} \left(1 - \frac{V}{\alpha} \Delta \right) x - \frac{m\pi}{b} y - \frac{k\pi}{l} \frac{\alpha^2 - V^2}{\alpha} \Delta t + \varphi \right) \right] \quad (9)$$

$$\text{де} \quad \Delta = \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 l^2 m^2}{(\alpha^2 - V^2) k^2 b^2}}.$$

Відповідно до загальних принципів побудови розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь із малим параметром у правій частині, розв'язок збуреного рівняння (1) за однорідних крайових умовах (2) будемо шукати у

вигляді асимптотичного ряду

$$u(x, y, t) = a(\cos(\kappa x + \delta y + \theta) - \cos(\chi x - \delta y - \theta)) + \varepsilon u_1(a, x, y, \theta) + \varepsilon^2 u_2(a, x, y, \theta) + \dots, \quad (10)$$

в якому $\theta = \omega t + \varphi$, а невідомі функції $u_1(a, x, y, \theta), u_2(a, x, y, \theta), \dots$ повинні визначатися так щоб: а) асимптотичне подання розв'язку (10) задовольняло з необхідним ступенем точності вихідному рівнянню (1); б) бути періодичними відносно x, y, θ ; в) задовольняти крайовим умовам, які випливають із (2). Крім цього, нелінійні сил є причиною того, що параметри a і φ для збуреного випадку є змінними величинами. Нижче будемо розглядати випадок, коли ці параметри не змінюються своїєї величини вздовж стрічки, а залежать тільки від часу. Закони їх зміни будемо шукати у вигляді диференціальних співвідношень [14].

$$a_t = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \quad \varphi_t = \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \quad (11)$$

Таким чином, задача полягає у визначенні таких невідомих функцій $A_1(a), A_2(a), \dots, B_1(a), B_2(a), \dots$ та $u_1(a, x, y, \theta), u_2(a, x, y, \theta), \dots$ при яких асимптотичне подання розв'язку (11) із необхідним ступенем точності задовольняє вихідному рівнянню (1).

Асимптотичне представлення розв'язку (10), (11) буде задовольняти вихідному рівнянню (1), якщо після підстановки в нього на місце функції $u(x, y, t)$ і її похідних відповідні вирази, коефіцієнти при однакових степенях малого параметра ε правої і лівої його частин будуть однакові. Останнє і служить умовою для визначення невідомих функцій $u_1(a, x, \theta), u_2(a, x, \theta), \dots$, зокрема, для знаходження $u_1(a, x, \theta)$ отримуємо лінійне диференціальне рівняння

$$\omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + 2V\omega \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial x} - (\alpha^2 - V^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = F_1(a, x, y, \theta) + \quad (12)$$

$$+ 2[A_1(a)(\omega + \kappa V)(\sin(\kappa x + \delta y + \theta) + (\omega - \chi V)\sin(\chi x - \delta y - \theta)) + aB_1(a)(\omega + \kappa V)\cos(\kappa x + \delta y + \theta) - (\omega - \chi V)\cos(\chi x - \delta y - \theta)]$$

де $F_1(a, x, y, \theta)$ відомого вигляду функція.

Після нескладних тригонометричних перетворень невідомі функції $A_1(a)$ і $B_1(a)$ у правій частини співвідношення (11) приймають вигляд



$$A_1(a) = \frac{\varepsilon}{2\pi b l \left[(\omega + \kappa V)^2 + (\omega - \chi V)^2 \right]} \int_0^l \int_0^b \int_0^{2\pi} f_1(a, x, y, \theta) \times \\ \times \left\{ [(\omega + \kappa V) \sin(\kappa x + \delta y) + (\omega - \chi V) \sin(\chi x - \delta y)] \cos \theta + [(\omega + \kappa V) \cos(\kappa x + \delta y) - (\omega - \chi V) \cos(\chi x - \delta y)] \sin \theta \right\} d\theta dy dx, \\ B_1(a) = \frac{\varepsilon}{a 2b \pi l \left[(\omega + \kappa V)^2 + (\omega - \chi V)^2 \right]} \int_0^l \int_0^b \int_0^{2\pi} f_1(a, x, \theta) \times \quad (13) \\ \left\{ [(\omega + \kappa V) \sin(\kappa x + \delta y) + (\omega - \chi V) \sin(\chi x - \delta y)] \sin \theta - [(\omega + \kappa V) \cos(\kappa x + \delta y) - (\omega - \chi V) \cos(\chi x - \delta y)] \cos \theta \right\} d\theta dy dx,$$

Визначивши функції, які визначають для першого наближення основні характеристики хвиль, тобто функції $A_1(a)$ і $B_1(a)$, перейдемо до знаходження функції $U_1(a, x, y, \theta)$. Вказана функція буде задовольняти накладені на неї умови, якщо представити її у вигляді

$$U_1(a, x, y) = \sum_{k \neq 1} \sum_m \sum_s U_{1ksm}(a) X_s \left(\frac{s\pi}{l} x \right) Y_m \left(\frac{m\pi}{b} y \right) \exp i(k\theta), \quad (14)$$

де $\left\{ X_s \left(\frac{s\pi}{l} x \right) \right\}$, $\left\{ Y_m \left(\frac{m\pi}{b} y \right) \right\}$ повні ортогональні системи функцій вигляду $\left\{ X_s \left(\frac{s\pi}{l} x \right) \right\} = \left\{ \sin \frac{s\pi}{l} x \right\}$, $\left\{ Y_m \left(\frac{m\pi}{b} y \right) \right\} = \left\{ \sin \frac{m\pi}{b} y \right\}$, а невідомі коефіцієнти її розкладу приймають вигляд

$$U_{1ksm}(a) = \frac{1}{\left(-k^2 \omega^2 + (\alpha^2 - V^2) \left(\frac{s\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right) \pi l b} \int_0^{2\pi} \int_0^l \int_0^b f_1(a, x, y, \theta) X_s \left(\frac{s\pi}{l} x \right) Y_m \left(\frac{m\pi}{b} y \right) \times \\ \times \exp(-i(k\theta)) dy dx d\theta \quad \text{при } k \neq 1$$

Подібного вигляду отримуються диференціальні рівняння для другого і наступних наближень, тільки права частина рівняння тобто функція $F_2(a, x, y, \theta)$ має більш громіздкий вигляд.

Нижче, для випадку $f(u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = Ku_t + Bu_{xx}^3$, подані графічні залежності, які ілюструють залежність частоти поздовжніх коливань від швидкості поздовжнього руху, амплітуди коливань

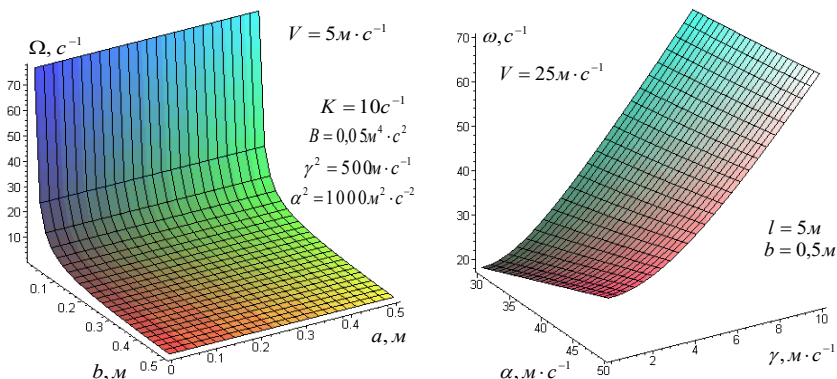


Рис.1. Залежність частоти коливань збуреного руху від амплітуди та фізико-механічних характеристик середовища за різних значень швидкості позовжнього руху

ВИСНОВКИ.

Розроблена у роботі методика дозволяє визначити вплив швидкості позовжнього руху, різної природи нелінійних сил на основні параметри коливань гнучких елементів систем транспортування. Отримані розрахункові залежності, які можуть служити базою для інженерних розрахунків відповідних елементів систем, а також представлені на їх основі графічні залежності проказують на значний вплив як фізико-механічних, геометричних параметрів на динаміку процесу, зокрема, для більших швидкостей позовжнього руху частота власних коливань є меншою і при значенні останньої α проходить зрив коливань. Достовірність розробленої методики підтверджується тим, що у граничному випадку при $\gamma \rightarrow 0$ із отриманих результатів випливають співвідношення, які стосуються коливань одновимірних систем [7,8].

REFERENCES:

- [1] Додд Р., Ейблек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. (1988). *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*. - М.: Мир.
- [2] Уизем Дж. (1977). *Линейные и нелинейные волны*. - М.: Мир.
- [3] Митропольский Ю. А. (1995). О построении асимптотического решения возмущенного уравнения Клейна - Гордона // Укр. мат. журн. (47), 1209 - 1216.
- [4] Митропольский Ю. А. (1998). О построении асимптотического решения возмущенного уравнения Брезертона. Укр. мат. журнал, (59), 58 - 71.

- [5] Митропольский Ю. А., Лимарченко О.С. (1998). К вопросу об асимптотических приближениях для медленных волновых процессов в нелинейных диспергирующих средах. Укр. мат. журнал, (59), 357 – 371.
- [6] Митропольський Ю.О., Сокіл Б. І. (1998). Про застосування Атеб-функцій для побудови асимптотичного розв'язку збуреного нелінійного рівняння Клейна-Гордона. Укр. мат. журнал, (50), 665 - 670.
- [7] Мартинців М. П., Сокіл М. Б. (2003). Одне узагальнення методу Д'Аламбера для систем, які характеризуються позовжнім рухом. Збірник науково-технічних праць УДАТУ, (13.4), 64-67.
- [8] Мартинців М. П., Сокіл Б. І., Сокіл М. Б. (2003). Хвильові процеси в однорідних нелінійно-пружних системах і методи їх дослідження. Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість, (28), 81-89.
- [9] Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. (1976). Асимптотические решения уравнений в частных производных. К: Вища школа.
- [10] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. (1974). Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука.
- [11] Харченко Є. В., Сокіл М.Б. (2007). Вплив періодичного збурення на багаточастотні коливання одновимірних нелінійно пружних середовищ, які характеризуються позовжнім рухом. Динаміка, міцність та проектування машин і приладів. - Вісник Національного університету "Львівська політехніка", (588), 81-89.
- [12] Харченко Є. В., Сокіл М. Б. (2007). Нелінійні процеси у середовищах, які характеризуються позовжнім рухом і вплив способу закріплення на їх коливання. Автоматизація виробничих процесів к машинобудуванню і приладобудуванню, (41), 156-159.
- [13] Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. (1970). Уравнения в частных производных математической физики. М.:Высшая школа.
- [14] Митропольский Ю.А. (1972). Метод усреднения в нелинейной механике. К.: Наукова думка.