

Лупаренко Олена Валентинівна¹

Luparenko O.

АНАЛІЗ СПЕКТРУ РЕЗОНАНСНИХ ЧАСТОТ ТА ВЛАСНИХ ФОРМ КОЛИВАНЬ КУСКОВО-НЕОДНОРІДНОЇ ОБЛАСТІ ПРЯМОКУТНОГО ПЕРЕТИНУ

THE ANALYSIS OF THE SPECTRUM OF RESONANT FREQUENCIES AND NATURAL VIBRATION MODES OF A PIECEWISE INHOMOGENEOUS REGION OF A RECTANGULAR CROSS SECTION

АНОТАЦІЯ:

Представлено систематизований аналіз впливу співвідношення механічних та геометричних параметрів складеного прямокутного перетину на явище крайового резонансу. Проведено енергетичний аналіз розподілу динамічної напруженості поблизу границі розподілу різномірних областей перетину.

ВСТУП

Розглянемо результати дослідження стаціонарних хвильових процесів у кусково-неоднорідних тілах прямокутної форми. Специфіка матеріалу визначається внутрішніми пружними параметрами області, які можуть бути кусково-сталими функціями координат. Важлива особливість геометрії областей обумовлена наявністю в них не тільки кутових точок, а й ліній розподілу середовищ з різними пружними характеристиками.

Представляє великий практичний інтерес дослідження особливостей хвильового поля в околі цих ліній розподілу. Тут має місце поява нових хвильових ефектів, пов'язаних, перш за все, з концентрацією динамічних напружень в околі внутрішніх і зовнішніх границь області. Змінюється і природа крайових ефектів, які вже будуть залежати не тільки від розмірів

¹ канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», УКРАЇНА

This work has been republished [without change]. First publication: Лупаренко, О. (2021). АНАЛІЗ СПЕКТРУ РЕЗОНАНСНИХ ЧАСТОТ ТА ВЛАСНИХ ФОРМ КОЛИВАНЬ КУСКОВО-НЕОДНОРІДНОЇ ОБЛАСТІ ПРЯМОКУТНОГО ПЕРЕТИНУ. *Грааль Науки*, (1), 169-177. DOI 10.36074/grail-of-science.19.02.2021.055.

області, а й від геометричних і пружних параметрів, що визначають характер неоднорідності. Задачі такого типу - багатопараметричні. На перший план при дослідженні виходять питання систематизації отриманих результатів з метою надання практичних рекомендацій для оптимального проектування перетину неоднорідних деталей при даних конкретних умовах її експлуатації в вібраційному полі. Крім того, досить актуальним залишається питання про можливість нехтування неоднорідністю структури розглянутого тіла при розрахунках на міцність, а також оцінкою похибок, які при цьому допускаються.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Розглянемо задачу про гармонійні коливання нескінченної в напрямку вісі Oz кусково-неоднорідної області, перетин якої в безрозмірних координатах описується нерівностями:

$$D = G^{(1)} \cup G^{(2)}$$

$$G^{(1)} = \{(x, y) : |x| \leq \delta; |y| \leq \eta\}$$

$$G^{(2)} = \{(\hat{x}, y) : \hat{x} \in [-\delta_2, 0] \cup [0, \delta_2]; |y| \leq \eta\} \quad (1)$$

де, $x, y, \hat{x}$ – віднесені до a декартові координати у $G^{(m)}, m = 1, 2$,
 $\delta = c/a, \eta = b/a, \delta_2 = 1 - \delta$.

Передбачається, що хвильове поле збуджується вібронавантаженням інтенсивності q , що гармонійно змінюється у часі з частотою ω і є прикладеним до зовнішніх границь перетину, а на границі контакту реалізуються умови жорсткого зчеплення.

При заданому навантаженні, розглядаємо задачу про вимушені коливання для різних значень частотного параметра $\Omega^{(1)}$. Процедура чисельного аналізу досить повно описана у [1] і може бути застосована до розрахунку без істотних змін. Частотне рівняння для визначення резонансних частот (РЧ) отримуємо, прирівнюючи визначник системи характеристичних рівнянь до нуля. Звичайно, це можливо робити тільки після того, як невідомі системи вийдуть на свою асимптотику [2,3]. При проведенні чисельного аналізу зробимо основний акцент на дослідженні

тонких хвильових ефектів, що проявляються на деяких частотах в небезпечних зонах перетину, в залежності від зміни його геометричних і структурних параметрів.

Розглянемо залежність явища крайового резонансу від зовнішніх розмірів перетину (параметр $\eta = L^{-1}$) і параметрів неоднорідності δ, δ_2 , що визначають розміри частин складеної області.

При малих значеннях безрозмірного параметра δ_2 , коли розміри області $G^{(2)}$ малі, вдалося встановити, що для деяких пар матеріалів одна з власних частот практично не змінюється при зміні параметра товщини перетину $L = \frac{a}{b}$.

Проведемо дослідження спектра РЧ для трьох комбінацій матеріалів областей, що стикаються. У першу групу пар матеріалів включимо матеріали-концентратори, які характеризуються виникненням особливостей в значеннях напруг в кутових точках. До другої групи включимо матеріали, на межі поділу яких виникають хвилі Стоунлі. Нарешті, до третьої групи віднесемо матеріали, що не входять до перших двох груп, в тому числі пари, що складаються з однакових матеріалів (назвемо ці пари «звичайними»).

Розглянемо залежності зміни РЧ $\Omega_k^{(1)}$ від параметра L при $\delta_2 = 1/7$, для пари матеріалів з другої групи St-Al і третьої групи Al-Al. Проведений аналіз показав, що для області, складеної з однакових матеріалів, ознаки крайового резонансу виражені яскравіше. Зауважимо, що параметр локальної особливості (ПЛО) у точці $A(\delta, \eta)$ стику двох середовищ для першого поєднання St-Al дорівнює $\alpha_A = 0.903$, а для другого поєднання Al-Al $\alpha_A = 1$. ПЛО в точці $B(1, \eta)$ не залежить від пружних параметрів областей і завжди дорівнює $\alpha_B = 1$.

Для інтегрального опису впливу особливостей хвильового поля на вібродинамічну поведінку складних деталей, доцільно провести порівняльний аналіз енергетичної характеристики середньої за період накопиченої у внутрішній області перетину деталі енергії. Вона пропорційна величині:

$$E = \sum_{m=1}^2 \iint_{G^{(m)}} (U_1^{(m)2} + U_2^{(m)2}) dG^{(m)} \quad (2)$$

Для ділянки області, що розташована в першій чверті, наведені значення величини E на різних РЧ $\Omega^{(1)}$ (табл. 1). Частина області перетину, що нас цікавить, розбивається на вертикальні ділянки. Для кожної з них обчислюється значення накопиченої енергії. Відношення її до повної енергії представлено в таблиці. Область $G^{(1)}$ виконана зі сталі, а область $G^{(2)}$ – з алюмінію. Обчислення проведені для значень $L = 2$; $\delta_2 = 1/7$. Частоти крайового резонансу тут і нижче відповідає третій рядок таблиці.

Таблиця 1

Розподіл енергії в характерних областях перетину на перших трьох резонансних частотах (малі розміри наплавлень)

$\Omega^{(1)}$	E	x / δ				$\hat{x} / \delta_2$	
		0.0 – 0.1	0.1 – 0.2	0.8 – 0.9	0.9 – 1.0	0.0 – 0.3	0.7 – 1.0
0.151	0.083	8.11	8.43	8.85	13.11	6.13	5.56
0.387	1.214	8.58	6.91	8.22	15.37	10.78	6.37
0.459	89.40	4.1	6.2	7.3	24.05	20.32	18.22

[авторська розробка]

З даних таблиці 1 випливає, що на частотах, відповідних крайовому резонансу спостерігається деяке зростання всіх показників хвильового поля не тільки поблизу бокової поверхні деталі, а й поблизу границі розподілу областей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$. Ті самі ефекти спостерігаються і для інших сполучень матеріалів у разі малих значень δ_2 .

Можна сформулювати такі висновки щодо особливостей спектра РЧ, що справедливі для малих значень безрозмірного параметра δ_2 і підтверджені результатами чисельного аналізу.

По-перше, неоднорідність суттєво ускладнює природу крайового резонансу, тому що плато не так яскраво виражені, протяжність горизонтальних ділянок спектра більше. Отже, розподіл енергії при неоднорідності носить менш яскраво виражений «кутовий» характер. Однак ознаки крайового резонансу наявні на великих ділянках частотного спектра.

По-друге, дослідження областей, з матеріалів другої групи, на границях розподілу яких існують хвилі Стоунлі, показало, що тільки для цих середовищ присутні деякі менш яскраво виражені в порівнянні з випадком однорідної

області ознаки крайового резонансу. Це можна пояснити тим, що відбувається відтік енергії від кута до границі розподілу.

По-третє, в картину спектру для матеріалів першої групи, які не входять в таблицю поєднання матеріалів, для яких існують хвилі Стоунлі, взагалі горизонтальні ділянки не входять, і, отже, ефекти крайового резонансу відсутні.

Основний висновок проведеного чисельного аналізу спектру РЧ полягає в тому, що коливання області, складеної із звичайних матеріалів, що входять в 3-ю групу, супроводжуються набагато більш яскраво вираженою «крайової» природою в порівнянні з матеріалами 2-ї групи. Для поєднання матеріалів, що входять до першої групи, ознаки крайового резонансу відсутні. По суті, для більшості поєднань матеріалів, які входять в першу і третю групу, виникнення ознак крайового резонансу і його інтенсивність регулюється значенням ПЛО в точці А. Чим ближче це значення до одиниці, тим більш виражені крайові ефекти. Окремо стоять пари матеріалів другої групи, де ця закономірність порушується. Для них спостерігаються більш слабкі в порівнянні з матеріалами третьої групи ознаки крайового резонансу, хоча для всіх пар матеріалів цієї групи ПЛО в точці А менше одиниці.

При збільшенні параметра δ_2 ефекти, характерні для явища крайового резонансу, зникають. У той же час збільшення розмірів δ_2 приблизно до значень δ лише кілька збільшує ефекти крайового резонансу на границі розподілу для матеріалів 3-ї групи. Це ілюструється даними таблиці 2, де розрахунки проведені для області з геометричними параметрами $L=1, \delta=0.5, \delta_2=0.5$.

Таблиця 2

Розподіл енергії у перетині для поєднання Ti-Cu (середні наплавлення)

$\Omega^{(1)}$	E	x/δ				$\hat{x}/\delta_2$	
		0.0 – 0.2	0.2 – 0.4	0.6 – 0.8	0.8 – 1.0	0.0 – 0.2	0.8 – 1.0
0.192	0.084	9.1	10.4	8.8	12.1	10.6	9.5
0.269	1.112	10.1	8.0	7.3	12.3	11.9	9.0
0.543	26.23	9.6	7.4	7.8	16.7	17.3	31.2

[авторська розробка]

У таблиці 3 представлені дані для області, складеної з пари матеріалів 1-ї групи Cu-St з тими ж геометричними параметрами ($L = 1, \delta = 0.5, \delta_2 = 0.5$).

Таблиця 3

Розподіл енергії у перетині для поєднання Cu-St (середні наплавлення)

$\Omega^{(1)}$	E	x/δ				$\hat{x}/\delta_2$	
		0.0 – 0.2	0.2 – 0.4	0.6 – 0.8	0.8 – 1.0	0.0 – 0.2	0.8 – 1.0
0.185	0.078	7.3	8.1	6.6	10.3	21.8	9.3
0.241	1.154	8.4	6.6	5.1	9.1	20.6	9.1
0.645	6.238	7.2	6.8	6.3	11.1	21.3	14.6

[авторська розробка]

З подальшим збільшенням розмірів зовнішніх областей ознаки крайового резонансу зникають практично для будь-яких поєднань матеріалів. Цей висновок не залежить від значення ПЛО в точці стику областей перетину.

Розглянемо розподіл нормованих, тобто віднесених до максимальних величин, компонент тензора напружень для різних сполучень пар матеріалів-концентраторів для 1-ї, 2-ї і 3-й РЧ. Слід зазначити, що при чисельному аналізі важливо враховувати не тільки пружні параметри пар матеріалів, але і акустичний опір середовищ, які контактують. При аналізі особливостей хвильового поля у разі різних співвідношень акустичних опорів матеріалів областей $G^{(m)}$ спостерігається різна ступінь ефективності відображення хвильового поля від границі розподілу. Для ілюстрації цього факту запроваджено параметр g_* , який визначає відношення хвильових опорів матеріалів областей $G^{(1)}$ і $G^{(2)}$. При поєднаннях пар матеріалів, для яких $g_* > 1$ (внутрішня область «м'якша»), спостерігається локалізація напружень у внутрішній кутовий точці області. На рис.1(а) представлено розподіл нормованого напруження $\bar{\sigma}_{11}(x, 0.95)$ для пари матеріалів-концентраторів Ni-Au ($\alpha_A = 0.897$) при $L = a/b = 2.25$, $\delta = 3\delta_2$, що відповідає середині плато в спектрі власних частот. Номери кривих відповідають номерам РЧ. Третя РЧ відповідає частоті крайового резонансу: в відповідній їй формі зона великих напружень зосереджена у внутрішній кутовий точці області та в меншій мірі поблизу торців прямокутника. При

видаленні від границі розподілу величина напружень різко спадає. На рис.1(б) представлено розподіл уздовж вісі $y = 0$ нормованого напруження $\bar{\sigma}_{22}(x, 0)$ для тієї ж пари матеріалів і тих же геометричних розмірах області.

В цьому випадку знову спостерігається зона відносно великих напружень у внутрішній кутовий точці області, а вздовж кордону локалізації немає. Крім того, на межі розподілу областей власні форми зазнають стрибкоподібний розрив.

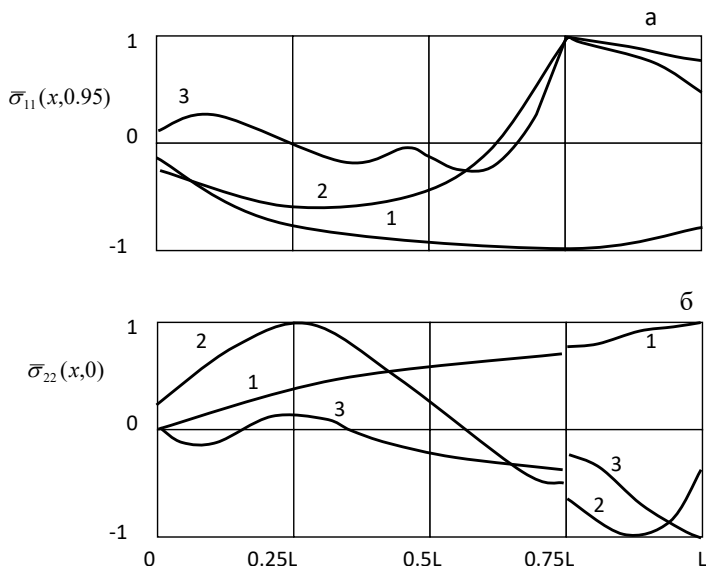


Рис. 1. Розподіл нормованих напружень по довжині перетину (поєднання матеріалів Ni-Au, $L = 2.25$)

При поєднанні пар матеріалів-концентраторів, відповідних величині $g_* < 1$ (внутрішня область більш «жорстка»), маємо якісно іншу картину в розподілі напружень. Очевидно, що розподіл величини енергії залежить не тільки від поєднання матеріалів, що задають область, а й від величини частотного параметру $\Omega^{(1)} = \omega a / c_S^{(1)}$ ($c_S^{(1)}$ — швидкість зсувних хвиль в області $G^{(1)}$). В даному випадку пар маємо майже рівномірний розподіл енергії по площі перетину. На частоті крайового резонансу, однак, велика

частина накопиченої енергії зосереджена в зовнішній, менш жорсткою області $G^{(2)}$. Спостерігається відсутність вираженої концентрації напружень, як на границі розподілу областей, так і поблизу зовнішніх кутових точок розглянутого складеного перерізу. Однак, близько 2/3 накопиченої енергії зосереджено у зовнішній області $G^{(2)}$, яка є менш жорсткою в порівнянні з внутрішньою. На рис. 2 представлено розподіл уздовж границі $y = 0.95$ нормованого напруження $\bar{\sigma}_{11}(x, 0.95)$ для пари матеріалів Au-Ni при описаних вище геометричних параметрах.

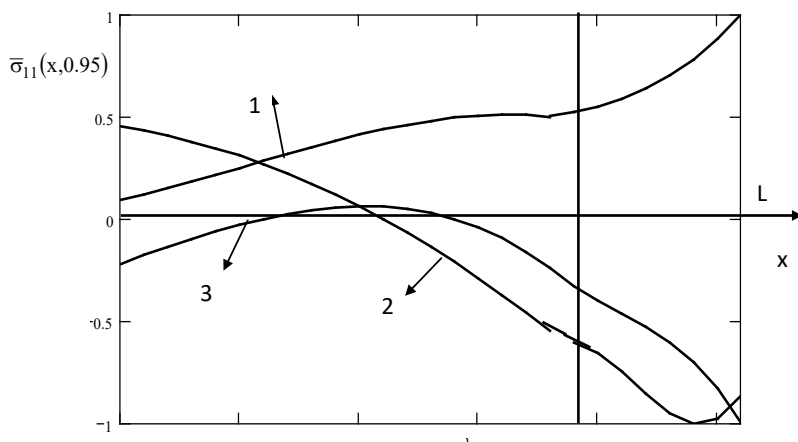


Рис. 2. Розподіл нормованих напружень по довжині перетину
(поєднання матеріалів Au-Ni , $L = 2.25$)

Таким чином, говорити про те, що тільки параметри Дандерса визначають пари матеріалів-концентраторів, не можна. У внутрішній кутовій точці області виникає концентрація напружень при певному порядку поєднання цих матеріалів. В даному випадку зовнішня область повинна бути більш жорсткою в порівнянні з внутрішньою областю.

Цікаве також питання, пов'язане з особливостями поведінки динамічних характеристик для пар матеріалів, для яких можливе виникнення хвиль Стоунлі [1]. І в цьому випадку важливе значення має певне поєднання таких матеріалів. Результати проведеного аналізу для пар матеріалів другої групи показали, що виникнення на межі розподілу двох середовищ хвиль типу

хвиль Стоунлі можливе лише в тому випадку, якщо для матеріалів, що становлять область перетину, жорсткість $g_* < 1$. У цьому випадку спостерігається різко виражена локалізація напружень уздовж границі розподілу областей. У внутрішній кутовій точці областей для цих матеріалів завжди існує локальна особливість. Крім того, маємо стрибкоподібний розрив в напруженнях $\bar{\sigma}_{22}(\delta, y)$ на границі розподілу. На рис. 3 представлено розподіл уздовж границі $y = 0$ нормованого напруження $\bar{\sigma}_{22}(x, 0)$ для пари матеріалів Al-St при $L = 2.25$.

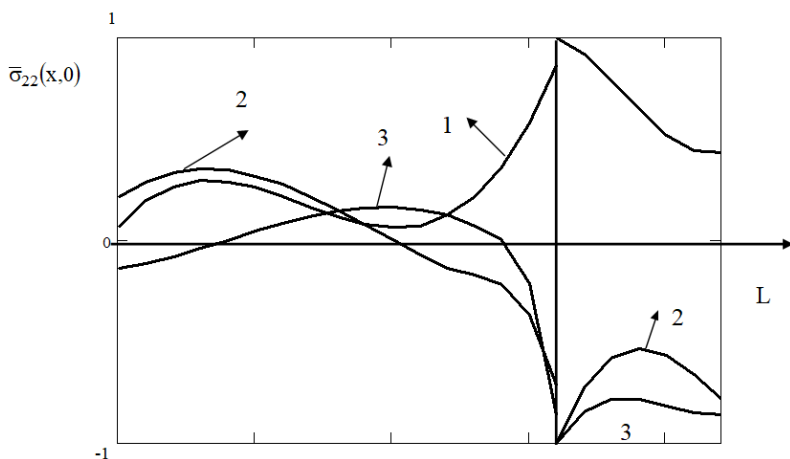


Рис. 3. Розподіл нормованих напружень по довжині перетину (поєднання матеріалів Al-St, $L = 2.25$)

Що стосується кількості збереженої енергії, то близько $3/4$ її зосереджено в зовнішній, більш «жорсткій» області. Це підтверджує раніше зроблені висновки про те, що для таких середовищ присутні ознаки крайового резонансу, які, проте, виражені не так яскраво, як у випадку однорідної області. Внутрішня, більш «м'яка» область, сприймає близько $1/4$ збереженої енергії.

Дослідження розподілу компонент тензора напружень в околі границі $x = \delta$ з параметром жорсткості $g_* > 1$, показало для таких матеріалів відсутність локалізації напружень уздовж границі розподілу середовищ і в кутовій точці A (рис. 4). При зазначеному поєднанні матеріалів близько $3/4$

збереженої енергії зосереджено у внутрішній, більш «жорсткій» області. Крім того, спостерігається інтенсифікація хвильових рухів в околі кутової точки області. Третя форма, яка відповідає частоті крайового резонансу, швидко зростає при підході до торця.

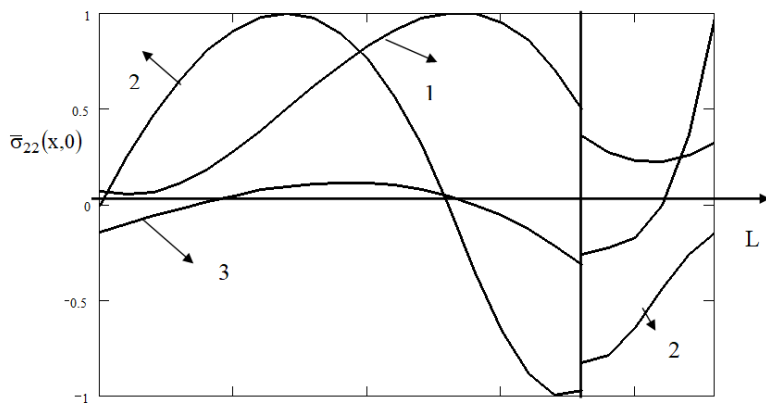


Рис. 4. Розподіл нормованих напружень по довжині перетину
(поєднання матеріалів St-Al, $L = 2.25$)

ВИСНОВКИ

Аналіз впливу співвідношення механічних і геометричних параметрів складеного перерізу на явище крайового резонансу дозволяє при аналізі спектру РЧ визначити умови, при яких зазначеними крайовими ефектами можна знехтувати. Зокрема, якщо для даного поєднання матеріалів значення ПЛО $\alpha_A < 1$ (матеріали-концентратори), то практично при будь-яких співвідношеннях пружних і геометричних параметрів складеного перерізу прояви крайового резонансу відсутні.

Для звичайних пар матеріалів ($\alpha_A = 1$) ознаки крайового резонансу присутні при малих розмірах зовнішньої області та поступово зникають з їх збільшенням. Окремо в аналізі стоять поєднання матеріалів, на границі розподілу яких можлива поява хвиль Стоунлі. Для цих поєднань значення $\alpha_A < 1$, але слабкі ознаки крайового резонансу присутні при малих розмірах наплавлень.

При енергетичному аналізі розподілу динамічної напруженості зроблено

наступні висновки: чим менше значення ПЛО для розглянутого поєднання матеріалів, тим більша кількість внутрішньої енергії накопичується в околі границі розподілу середовищ. Подібні результати отримані і при аналізі динамічних компонент тензора напружень на різних частотах.

REFERENCES:

- [1] Гринченко В.Т. & Мелешко В.В. (1981). *Гармонические колебания и волны в упругих телах*. Киев: Наук. думка.
- [2] Вовк Л.П., Соболев Б.В. & Лупаренко Е.В. (2001). Асимптотический метод исследования волновых полей в анизотропной прямоугольной области. *Вестник Донского государственного технического университета*, (1), 57-65.
- [3] Вовк Л.П. & Лупаренко Е.В. (2002). Про один метод исследования вибрационных характеристик кусочно-неоднородных элементов конструкций прямоугольной формы. *Вибрации в технике и технологиях*, (24), 22-25.