 DOI 10.36074/csriteenat.ed-1.01

УДК 681.396, 681.375

Опубліковано 25 квітня 2020 року

РІШЕННЯ БАГАТОМІРНИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗУ БАГАТОФУНКЦІОНАЛЬНИХ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СЕПАРАБЕЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

КОЛОМІЙЦЕВ Олексій Володимирович

Заслужений винахідник України, доктор технічних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри обчислювальної техніки та програмування

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

ТРЕТЯК Вячеслав Федорович

кандидат технічних наук, доцент, провідний науковий співробітник наукового центру Повітряних Сил

Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба

УКРАЇНА

Анотація: *В роботі проведено дослідження методів оптимального синтезу багатофункціональних інформаційно-вимірювальних систем (БІВС) та сформовані загальні вимоги до єдиного методу оптимізації. Установлено, що методом оптимального синтезу сучасних БІВС може бути сепарабельне програмування, яке дозволяє вирішити питання багатомірності задач. Метод дозволяє отримані результати різних часток задач оптимального синтезу БІВС «зшивати» в єдине ціле. При цьому, вирішуються наступні задачі: багатомірності оптимізації технічних параметрів БІВС, зходимості отриманих результатів оптимізації, побудови кривих обміну тощо. Розглянуто переваги методу сепарабельного програмування перед існуючими методами оптимізації БІВС. Встановлено, що запропонований метод можливо застосовувати для рішення будь-якої задачі оптимального синтезу (оптимізації) багатофункціональних і однофункціональних сучасних ІВС, у тому числі, окремо, – інформаційного і вимірювальних каналів системи.*

ВСТУП.

Відомо, що методи оптимального синтезу (оптимізації) інформаційно-вимірювальних систем (радіо і оптичного діапазонів довжин хвиль) можливо класифікувати за наступними формами виразів цільової функції та функцій зв'язку:

– прямого пошуку (дихотомія, за числами Фібоначчі та ін.);

– лінійного програмування (сімплекс-метод, метод обернення матриці коефіцієнтів та ін.);

– нелінійні методи (опукле програмування – градієнтні методи першого та другого порядку і тощо).

Під час обробки статистики (при отриманні ліній середньоквадратичної регресії нечіткої вартості на параметр) змінюються форми функцій зв'язку, тобто, методи математичного програмування при розв'язанні задач оптимізації.

Таким чином, необхідний новий єдиний, універсальний і ефективний метод оптимального синтезу (оптимізації) БІВС, який би не залежав від форми функцій зв'язку та задовольняв би наступним вимогам:

– універсальності;

– мінімального часу на розв'язання задач великої розмірності;

– спрощення алгоритму оптимізації;

– сходимості і контролюємість результатів розв'язання задач оптимізації;

– мінімального часу на перевірку отриманих результатів (опуклості);

– спрощення оцінки залежності оптимізації системи від сталих факторів;

– мінімального часу на отримання кривих обміну.

Метод сепарабельного програмування дозволить вирішити проблему багатомірності, сходимості результатів, побудови кривих обміну і тощо.

ОСНОВНА ЧАСТИНА.

Вимоги щодо універсальності вирішує метод Вульфа [1], в якому лініарізуються опуклі цільова функція і функція зв'язку та задача оптимального синтезу зводиться до відомого лінійного програмування. Метод Вульфа можливо вважати універсальним, але він не задовольняє іншим вимогам, що перелічені. Інші методи оптимального синтезу ІВС також не універсальні і особливо неприйнятні для рішення задач великої

 DOI 10.36074/csriteenat.ed-1.01

розмірності.

Основний недолік методу Вульфа саме у лінеарізації всіх функцій, що призводить до суттєвого зменшення кроку ітерації за кожним параметром і, відповідно, збільшення числа ітерацій. Однак, якщо не лінеарізувати функції, то можливе нелінійне програмування, яке буде мати якості градієнтних методів і зможе адаптувати крок ітерації, але має великі складнощі.

Відомо, що більшість постановок задач оптимального синтезу ІВС вміщують цільову функцію за головним показником системи і функцію зв'язку, яка є вартістю (витратним показником). Отже, якщо є нечіткий показник вартості, доцільно лінеарізувати лише функцію зв'язку. Для спрощеного розв'язання задачі оптимального синтезу БІВС у аналітичному вигляді достатньо мати сепарабельну цільову функцію, яку можна перетворити у сепарабельну однотипну функцію. Тобто, коли критерій точності вимірювального (інформаційного) каналу БІВС залежить від максимуму відношення сигналу до шуму:

$$\max q(\overline{X}(\overline{Y})) = \sum_{i=1}^{n} X_i(Y_i), \tag{1}$$

де:

n – число параметрів;

$X_i(Y_i)$ – фазовий параметр (ФП), або складна монотонна функція від технічного параметра (ТП) Y_i.

При цьому, ФП відображає вплив ТП і функцій розстроєк, збурень і неідеальностей БІВС на відношення сигналу до шуму $q(\overline{X}(\overline{Y}))$. Функція зв'язку $\varphi(\overline{Y})$ може мати будь-який вигляд тому, що при лінеаризації функції вартості $C(\overline{Y})$ в околиці Y_{i0} вона завжди стає сепарабельною:

$$\varphi(\overline{Y}) = C_д - C(\overline{Y}) = C_д - \sum_{i=1}^{n} [C_i(Y_{i0}) - C_i'(Y_{i0})(Y_i - Y_{i0})] \geq 0, \tag{2}$$

тобто:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(Y_{i0})Y_i] \leq C_e, \tag{3}$$

де:

$$C_e = C_д - \sum_{i=1}^{n} [C_i(Y_{i0}) + C_i'(Y_{i0})Y_{i0}], \tag{4}$$

$C_д$ – допустиме значення вартості.

Задача нелінійного програмування (1), (3) може бути складною. Тому, заміна ТП на ФП задача вирішується у аналітичному вигляді та стає простою.

Функцію Лагранжа задачі нелінійного програмування (1), (3) можливо записати у наступному вигляді:

$$L(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i + [C_д - \lambda \sum_{i=1}^{n} C'_i(X_{i0}) X_i]. \tag{5}$$

Систему рівнянь можливо записати, як:

$$\forall k \in [1, n] \rightarrow \frac{\partial L}{\partial X_k} = \frac{a}{X_k} - \lambda C'_k(X_{k0}) = 0. \tag{6}$$

У даному випадку, оскільки складові цільової функції однотипні, невизначене рішення дорівнює:

$$X_k = \frac{a}{\lambda C'_k(X_{k0})}. \tag{7}$$

Таким чином, немає потреби вирішувати систему рівнянь (6) тому, що ці рівняння ідентичні. Невизначений множник можна отримати, якщо формулу (7) підставити у формулу (3), визначити параметр λ та підставити у формулу (7):

$$\sum C'_k(X_{k0}) \frac{a}{\lambda C'_k(X_{k0})} = C_e, \tag{8}$$

$$\lambda = \frac{na}{C_e}, \tag{9}$$

$$X_k = \frac{C_e}{n C'_k(X_{k0})}. \tag{10}$$

Результат можливо записати наступним чином:

$$\max q(\overline{X}) = \frac{(C_e / n)^n}{\sum_{k=1}^{n} C'_k(X_{k0})}. \tag{11}$$

Із зворотних функцій отримуються ТП:

$$Y_k = Y_k(X_k). \tag{12}$$

Залежність оптимуму від відношення середньоарифметичної частини до середньогеометричної частини представлена формулою (11), в якої можливо помітити зростання складності алгоритму оптимізації від розміру задачі і тощо.

Для проведення якісного оптимального синтезу БІВС необхідно враховувати вартість на основі маркетингової статистики тому, що сама

 DOI 10.36074/csriteenat.ed-1.01

вартість є нечіткою величиною.

Запишемо вираз для визначення дисперсії похибки вимірювання параметра БІВС за рахунок випадкової шумової складової похибки для дискримінатора:

$$\sigma_\lambda^2 = \frac{\Delta\lambda^2}{q} = \frac{1}{(\Delta\lambda)^{-2} q} = \frac{const}{\sum_{j=1}^{n1} X_j(Y_{ji})}, \tag{13}$$

де:

$\Delta\lambda$ – апертура, діапазон однозначності відрахунку оцінки (розкрив дискримінатора);

q – відношення потужностей сигналу до шуму;

$X_j(Y_{ji})$ – функції монотонних залежностей від ТП, які впливають на j-й показник БІВС.

При цьому, завадостійкість БІВС залежить від відношення сигнал/шум q, та з m_1 ортогональними сигналами, ймовірність похибки дорівнює:

$$p_{\text{ош ср}} = \sqrt{m_1 - 1}\exp(-\frac{q_п}{2} - 1{,}4), \tag{14}$$

де:

$q_п$ – відношення сигнал/шум на виході приймача, або зворотно пропорційне відношенню потужностей сигналу до шуму (11) та дорівнює:

$$\frac{1}{q_п} \le \frac{1}{2\ln\frac{\sqrt{m_1 - 1}}{p_{\text{ш доп}}} - 2{,}8} = \frac{1}{q_n} = \frac{const}{\sum_{j=1}^{n1} X_j(Y_j)}. \tag{15}$$

Найбільшу завадостійкість і точність вимірювань, повинні мати однофункціональні (одноканальні) ІВС з показниками (1), (3). Такі показники можуть служити цільовою функцією багатьох задач оптимального синтезу системи. Для них цільова функція може бути зворотною по відношенню до q:

$$\min q^{-1}(\overline{X}) = k_1 \frac{1}{\sum_{j=1}^{n1} X_j}. \tag{16}$$

При обмеженні за вартістю, задача має рішення (17), а зворотно пропорційний результат (18):

$$X_{i(p)} = \frac{C_{E1}(\overline{X}_{(p-1)})}{n1 C_i'(X_{i(p-1)})}, \tag{17}$$

де:

p – номер ітерації,

оптимум складає:

$$F(X_{opt}) = q^{-1}(\overline{X}_{opt}) = \frac{k_1 \prod_{j=1}^{n1} C_j^1(X_{j(p)})}{[C_{E1}(\overline{X}_{(p)})/n1]^{n1}}. \tag{18}$$

За умови, якщо обмеження нелінійні, то перші значення вектору параметрів і вартостей функціональних елементів (ФЕ) БІВС, які є початковим планом, підставляються у формулу для отримання вектору рішення першої ітерації. Отже, процес ітерацій продовжується до отримання оптимальних рішень за показником, параметрами та вартістю ФЕ. У даному випадку, на відміну від методу Вульфа, відбувається наступне:

– здійснюється розв'язання простішої задачі (будь-якого розміру) в аналітичному вигляді, користуючись сепарабельністю функцій, що одразу дає представлення про характер оптимуму;

– отримується рішення у аналітичному вигляді (у вигляді формули) у якості ітеративного рішення, що вирішує проблему багатомірності;

– за умови, якщо функція зв'язку була лінійна, то рішення є кінцевим;

– за умови, якщо функція зв'язку не лінійна, то її можна оцінити за критерієм близьким до апроксимації (до $10\,\%$ початкової функції) за всіма параметрами:

$$\Delta X_i \le \frac{0{,}2 C_i'(X_i)}{C_i''(X_i)}, \tag{19}$$

де:

$C_i''(X_i)$ – друга похідна вартості;

– для параметрів, які за областю, що задовольняє апроксимації, треба обмежити крок ітерації до межі цієї області.

При цьому, правилом зупинки може служити критерій точності рішення:

$$X_{j(p)} - X_{ijp-1)} \le \sigma X_{j(p-1)}, \tag{20}$$

де:

 DOI 10.36074/csriteenat.ed-1.01

j – номер параметру;

p – номер шага ітерації;

$\sigma = 0{,}1 = 10\%$ – відносна точність рішення.

Отже, дане рішення має наступні переваги перед відомими методами математичного програмування:

– вирішення проблеми багатомірності (можливе врахування усіх параметрів системи);

– простіше розв'язання задачі за умовним екстремумом (при однієї функції зв’язку – не треба розв’язання системи нелінійних рівнянь);

– універсальність за відношенням до форми цільової функції і будь-яких функцій зв’язку, а при повному наборі розв'язаних простіших задач – універсальність і для різних класів цільових функцій;

– характер випуклості (впуклості) та вплив лише на наявність екстремуму, що потребується;

– значення у числах використовуються тільки в процедурі ітерацій;

– результат отримується у вигляді алгоритму оптимізації і оптимуму в аналітичному вигляді та гідний для аналізу в області задовільної апроксимації, що важливо при стохастичному програмуванні для визначення довірчих інтервалів;

– ТП відшукуються у вигляді обернених функцій ФП;

– результат оптимізації отримується у аналітичному вигляді та гідний для аналізу ефективності, у тому числі в якості кривої обміну за Гуткіним Л.С.;

– допустиме розв’язання задачі за частками, а потім їх зшивання у єдиний (загальний) результат;

– «криві обміну» дозволяють об’єктивно оцінити оптимальність синтезу структури БІВС і її каналів та сигналів, що застосовуються.

У проведеному досліджені оптимального синтезу (оптимізації) БІВС можливо побачити головну ідею нового методу сепарабельного (математичного) програмування, яка усуває згадані попередні недоліки існуючих методів, що позначені у вимогах до методу, а також використовує лінійну апроксимацію складної сепарабельної функції зв’язку та однотипність цільової функції. При цьому, сепарабельність функції зв’язку необов’язкова тому, що лінеаризація будь-якої функції обмежень призводить до лінійної, тобто до сепарабельності апроксимації, а сепарабельність цільової функції забезпечується монотонним перетворенням змінних. До іншої переваги сепарабельного програмування можна віднести те, що за частками, як у блочному програмуванні, розподіляються задачі програмування, а далі зшиваються їх результати у єдине ціле.

Попередньо розглянуту задачу оптимального синтезу БІВС, яка призначена для боротьби з завадою (підвищення відношення потужності сигналу до шуму), можливо розширити для врахування впливу похибок еталонів на результуючу похибку вимірювань:

$$F = \min\left[\frac{k_1}{\sum_{j=1}^{n1} X_j} + \sum_{i=1}^{n2} X_i^2\right], \tag{21}$$

при:

$$C(\overline{X}) \le C_{доп}, \tag{22}$$

де:

$k_1 = const$;

X_j – монотонні функції технічних та паразитних параметрів впливу розстроєк, збурень та неідеальностей (чим вони більше, тим краще для системи);

X_i – похибки за рахунок нестабільності еталонів (чим вони менше, тим краще для системи).

Вартість на параметри першої складової у (21) роздільні від вартості на параметри другої складової. У даному випадку можливі дві стандартні задачі:

– за типом (7), (9);
– за типом (21), (22) – мінімум другої складової при обмеженнях на свої асигнування $C_{д2}$:

$$\min \sum_{i=1}^{n2} X_i^2, \tag{23}$$

при:

$$C_{(i))}(\overline{X}_{(i)}) \le C_{д2}, \tag{24}$$

отримуємо умову:

 DOI 10.36074/csriteenat.ed-1.01

$$\sum_{i=1}^{n2} C_i^1(X_{0i})X_i \le C_{E2}, \tag{25}$$

$$C_{E2} = C_{д2} - \sum_{i=1}^{n2}[C_i(X_{0i}) - C_i^1(X_{0i})X_{0i}]. \tag{26}$$

Для задачі (23), (25), (26) функцію Лагранжу можливо записати у наступному вигляді:

$$L_2 = \sum_{i=1}^{n2} X_i^2 + \lambda_2[C_{E2} - \sum_{i=1}^{n2} C_i^1 X_i]. \tag{27}$$

За умови:

$$\frac{дL_2}{дX_k} = 2X_k - \lambda_2 C_k^1 = 0, \tag{28}$$

можливо отримати наступне значення:

$$X_k = \lambda_2 C_k^1 / 2, \tag{29}$$

яке, для отримання значення параметра λ_2, підставляємо в умову (25), (26).

Отже, друга задача матиме аналітичне рішення і оптимум:

$$X_{i(r)} = \frac{C_{E2}(\overline{X}_{(r-1)})C_i'(\overline{X}_{i(r-1)})}{\sum_{i=1}^{n2}\left[C_i'(X_i)\ \right]^2}, \tag{30}$$

$$F_2(C_{E2}) = \frac{C_{E2}}{\sum_{i=1}^{n2}\left[C_i'(X_i)\right]^2}. \tag{31}$$

Отримані рішення двох задач (17), (18) та (30), (31) можливо зшити рішенням послідовної (простої) двохмірної задачі:

$$\sigma_\lambda^2 = F_1(C_{E1}) + F_2(C_{E2}), \tag{32}$$

$$C_{E1} + C_{E2} \le C_E. \tag{33}$$

За методом Ньютона-Рафсона може бути отримане рішення у вигляді ітеративної формули. Наприклад, оптимум задачі (21), (22), (23) можливо знайти, при вже відомих оптимумах двох часткових задач:

$$F = \frac{A}{C_{E1}^{n1}} + \frac{C_{E2}^2}{B}, \tag{34}$$

при:

$$C_{E1} + C_{E2} = C_E, \tag{35}$$

де:

$$A = n1^{n1}\prod_{j=1}^{n1} C'_j\,, \tag{36}$$

$$B = \sum_{ш=1}^{n2}(C'_i)^2\,. \tag{37}$$

Отже, задачу оптимального синтезу можливо вирішити за одною змінною за методом підстановки з умови:

$$\frac{dF}{dC_{E1}} = 0\,, \tag{38}$$

в аналітичному вигляді – за методом Ньютона-Рафсона з рівняння:

$$C_{E1} = C_E - \frac{D}{C_{E1}^{n1+1}}\,, \tag{39}$$

де:

$$D = \frac{n_1 AB}{2}\,. \tag{40}$$

При цьому, однотипність функцій досягається заміною (нескладною) змінних задачі на ФП.

ВИСНОВКИ З ТЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ.

Таким чином, запропонований новий метод сепарабельного програмування не містить недоліків, які мають відомі методи, що були згадані раніше та представлені як вимоги до методу оптимізації ІВС, який необхідний. Даний метод вирішує проблему багатомірності, сходимості результатів, простоти, побудови кривих обміну і тощо. Метод легко може бути використаний і для рішення цільової функції як у вигляді добутку однотипних функцій, так і у вигляді додатку при відповідних монотонних змінних:

$$\min q = \min \prod_{i=1}^{n} X_i(Y_i) = \min[\exp \sum_{i=1}^{n} \lg X_i(Y_i)]\,, \tag{41}$$

Наприклад, призначимо:

$$Z_i(X_i) = \lg X_i(Y_i)\,, \tag{42}$$

та:

$$C_i(X_s) = C_i(\exp Z_i)\,. \tag{43}$$

Додаток функцій в цільовою функцію можна представити навпаки як добуток змінних функцій. За умови, якщо різні частки задачі, то можливе зшивання результатів оптимізації. При цьому, спрощення

 DOI 10.36074/csriteenat.ed-1.01

цільової функції призводить до монотонного ускладнення обмежень за вартістю, які враховуються при розрахунку похідних від складних функцій.

Отже, перелічені особливості нового методу сепарабельного програмування та вказані його переваги перед відомими методами нескладно пристосувати практично до будь-якої задачі оптимального синтезу (оптимізації) сучасних БІВС (або їх інформаційних та вимірювальних каналів).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

[1] Wolfe, Ph. (1959). The simplex method for quadrate programming. *Econometrica*, 3(28), 600-606.

[2] Алешин, Г.В., Панченко, С.В. & Приходько, С.І. (2018) Оптимізація цифрових систем передачі. Харків.

[3] Коломійцев, О.В. (2013). Лазерна інформаційно-вимірювальна система, побудована на нових принципах роботи з літальними апаратами. *Системи обробки інформації: Проблеми і перспективи розвитку IT-індустрії (Т. 2),* 3(110), 192.

[4] Aloshin, G.V., Kolomiitsev, O.V., Tkachev, A.M. & Posohov, V.V. (2019). Separable programming method for solving multi-dimensional problems of optimizing the parameters of laser information measurement systems. *Сучасні інформаційні системи (Т. 3), (*1), 23-28.

[5] Aloshin, G.V., Kolomiitsev, O.V., Tkachev, A.M., Klivets, S.I. & Posohov, V.V. (2019). Metod of optimization of radioelectronic measurers. *Сучасні інформаційні системи (Т. 3), (*3), 113-119.